

Impulsantworten über Impedanzböden

M. Ochmann, R. Piscoya

Beuth Hochschule für Technik Berlin
Projektgruppe Computational Acoustics

ochmann@beuth-hochschule.de



Überblick

1. Motivation und Ziel
2. Impulsantworten in **3D**
 - 2.1 Theorie
 - 2.2 Numerik und Animationen
3. Impulsantworten in **2D**
 - 3.1 Theorie
 - 3.2 Numerik und Animationen
4. Ausblick

1. Motivation und Ziel

Berechnung der Impulsantwort g über einer Impedanzebene

ist ein wichtiger Grundbaustein der BEM im Zeitbereich

Allgemeine Lösung durch Faltung

2. Impulsantworten in 3D

2.1 Theorie

Schallquelle ist ein Dirac-Deltaimpuls zur Zeit $t=0$ und am Ort

$t=0$ und am Ort $y = (x_s, y_s, z_s) = (0, 0, h)$

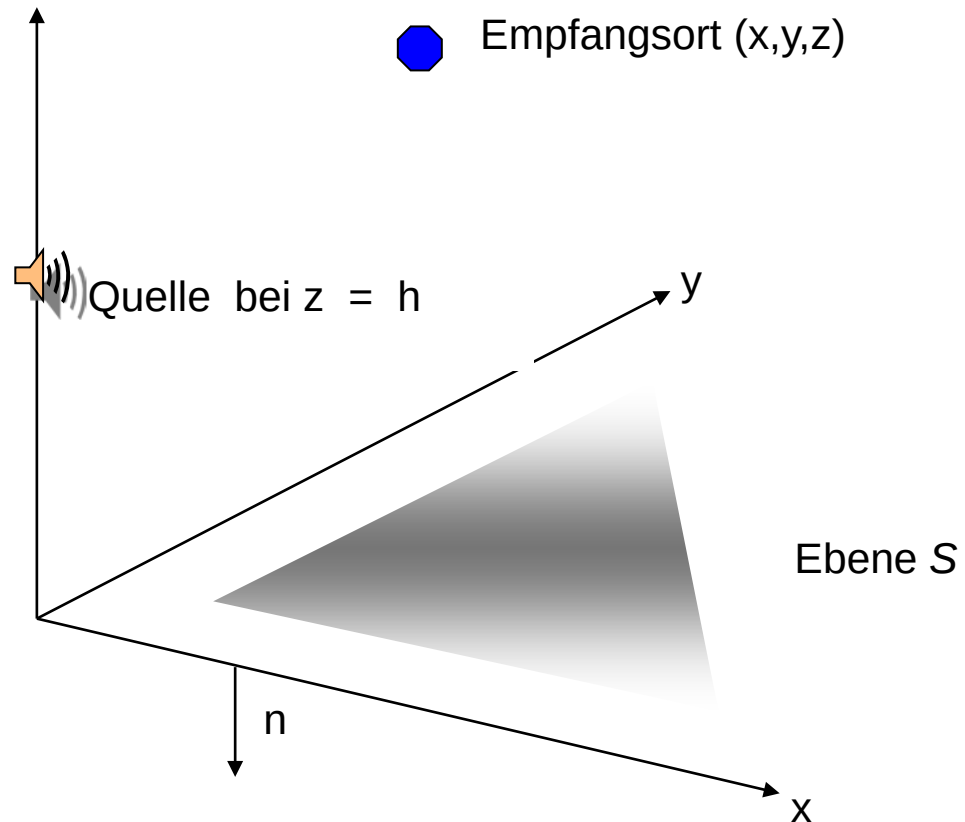
$$q(x, y, z, t) = Q\delta(x, y, z - h, t)$$

Lösung muss die Wellengleichung

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p = -q(x, y, z, t)$$

plus Randbedingung auf einer unendlichen Ebene erfüllen.

Geometrie des Halbraumproblems



Ausgangspunkt:

Halbraum-Greensche Funktion im Frequenzbereich

$$G(x, y) = \frac{e^{jkr(h)}}{4\pi r(h)} + \frac{e^{jkr(-h)}}{4\pi r(-h)} + \hat{\sigma}$$

mit

$$\hat{\sigma} = 2\gamma e^{-\gamma h} \int_{-\infty}^{-h} e^{-\gamma \eta} \frac{e^{jkr(\eta)}}{4\pi r(\eta)} d\eta$$

Hierbei sind $r(h) = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - h)^2}$

$$k = \omega/c$$

$$\gamma = jk / Z_0$$

$$Z_0 = Z / (\rho c)$$

Impulsantwort für eine massenartige Ebene

Inverse Fouriertransformation liefert nach einiger Rechnung geschlossene analytische Darstellung für eine unendliche Ebene, die mit der Flächenmasse m'' schwingt.

Hauptresultat 1

$$g = \frac{\delta(t - r(h)/c)}{4\pi r(h)} + \frac{\delta(t - r(-h)/c)}{4\pi r(-h)} - \frac{c\zeta}{2\pi} e^{\zeta(h+z)} \frac{e^{-\zeta\sqrt{(ct)^2 - R^2}}}{\sqrt{(ct)^2 - R^2}} H\left(t - \frac{r(-h)}{c}\right)$$

Hierbei sind: $\zeta = \frac{\rho}{m''}$ $R^2 = x^2 + y^2$ H = Heavisidescher Einheitssprung

Diskussion der Impulsantwort für eine massenartige Ebene

Spezialfälle für $\zeta = \frac{\rho}{m''} \rightarrow 0$ Schallharter Fall

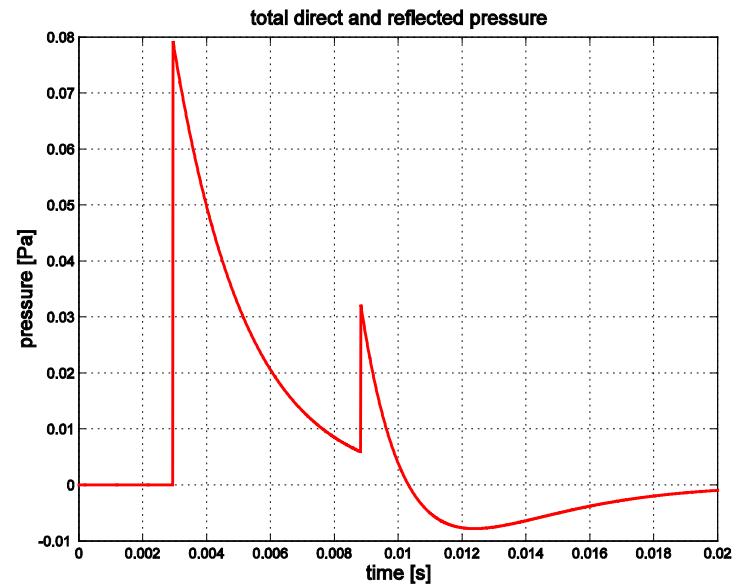
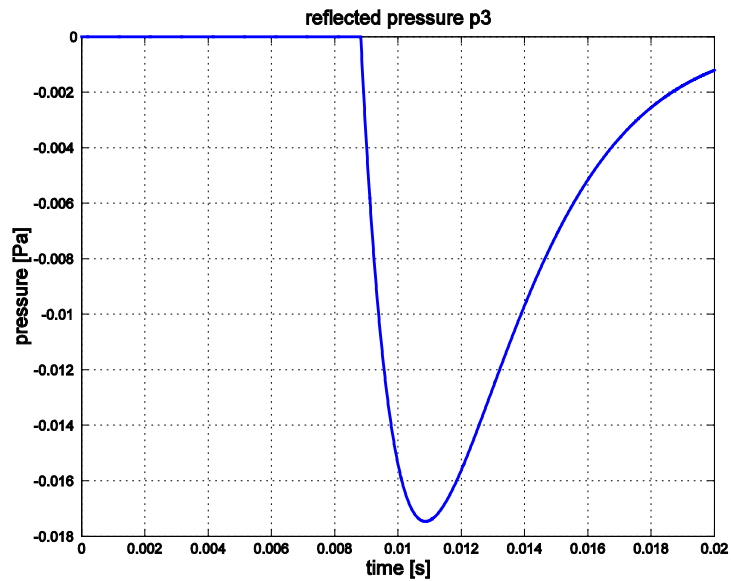
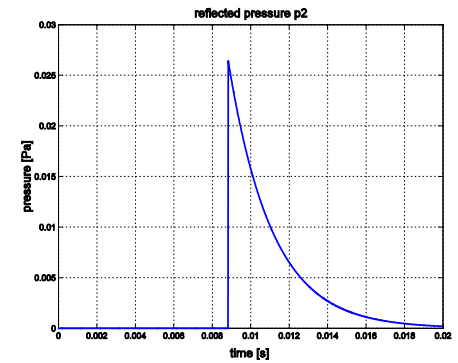
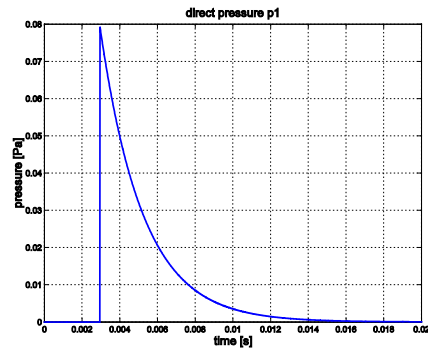
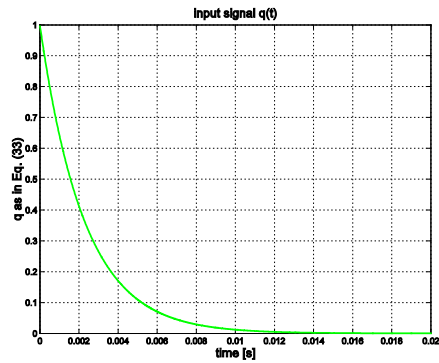
Für das harmonisch Signal $q(t) = e^{-j\omega t}$ bekannte Frequenzlösung

Für das exponentiell abklingende Signal $q(t) = \begin{cases} e^{-\zeta ct}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} = e^{-\zeta ct} H(t)$

erhält man durch Faltung für senkrechten Schalleinfall einfache Lösung.

Dargestellt für $m'' = 1 \text{ kg} / \text{m}^2$, $h = 1 \text{ m}$, $(x, y, z) = (0, 0, 2 \text{ m})$

- a) Input Signal $q(t)$
- b) Direktes Signal am Empfangsort
- c) Reflektiertes Signal am Empfangsort
- d) reflected signal am Empfangsort
- e) Direktes plus Summe der reflektierten Signale



Impulsantwort für eine rein absorbierende Ebene

Inverse Fouriertransformation liefert nach **langer** Rechnung geschlossene analytische Darstellung für eine unendliche Ebene, die mit der reellen Impedanz Z belegt ist: $Z_0 = Z / (\rho c)$

Hauptresultat 2

$$g = \frac{\delta(t - r(h)/c)}{4\pi r(h)} + \frac{\delta(t - r(-h)/c)}{4\pi r(-h)} + \sigma$$

mit

$$\sigma = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \frac{H(t - r(-h)/c)}{\sqrt{(Z_0 c t + z + h)^2 + (1 - Z_0^2) R^2}}$$

Diskussion der Impulsantwort für eine absorbierende Ebene

Spezialfälle sind schallharter und schallweicher Fall

Für das harmonisch Signal $q(t) = \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t}$

und die Impedanz der ebenen Welle $Z = \rho c$

erhält man durch Faltung für senkrechten Schalleinfall die plausible Lösung

$$p = p_1 + p_2 + p_3 \approx \frac{1}{4\pi r(h)j\omega} e^{-j\omega(t-r(h)/c)}$$

für große Entfernungen oder / und hohe Frequenzen: d.h. keine Reflektion!

mit $z_h = z + h, \quad r_h = \sqrt{R^2 + z_h^2}$

Beispiel 1: Dreiecksimpuls

Spezialfälle sind schallharter und schallweicher Fall

$$q_{\Delta}(t) = \begin{cases} t/T, & t \in [0, T] \\ (2T - t)/T, & t \in [T, 2T] \end{cases}$$

Lösung durch Faltung mit Hauptresultat 2

$$p = p_1 + p_2 + \frac{1}{2\pi T}(p_{31} + p_{32})$$

mit

$$p_{31} = \begin{cases} 0, & t < t_h + T \\ F(t - T) - F(t_h), & t_h + T < t < t_h + 2T \\ F(t - T) - F(t - 2T), & t_h + 2T < t \end{cases} \quad p_{32} = \begin{cases} 0, & t < t_h \\ F(t) - F(t_h), & t_h < t < t_h + T \\ F(t) - F(t - T), & t_h + T < t \end{cases}$$

$$F(\tau) = \frac{1}{Z_0 c} \ln \left[(Z_0 c \tau + z_h) + \sqrt{(Z_0 c \tau + z_h)^2 + (1 - Z_0^2) R^2} \right] + C$$

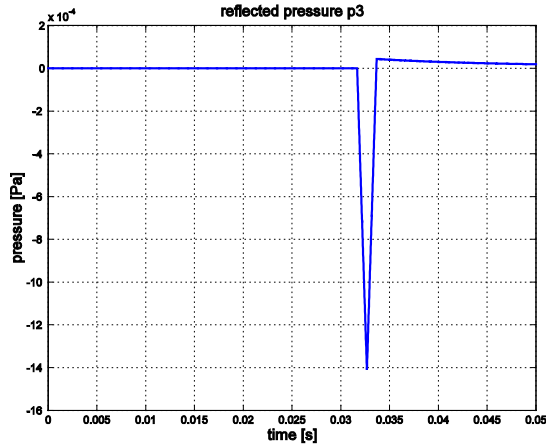
Darstellung Dreiecksimpuls

Reflektierter Schalldruck für verschiedene Impedanzen $Z_0 = Z / (\rho c)$
und die folgenden Parameter:

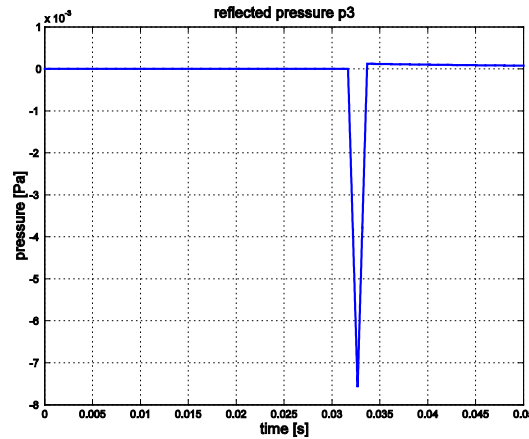
$$h = 2m, z = 8m, R = \sqrt{x^2 + y^2} = 4m, T = 0.001\text{sec}$$

Reflektierte Signale p3

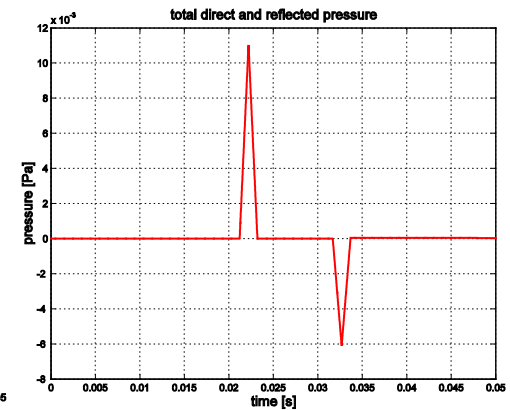
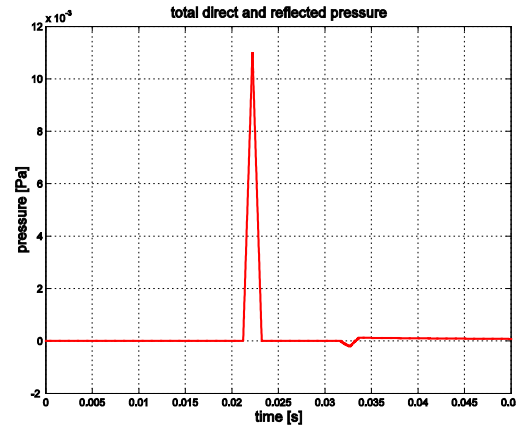
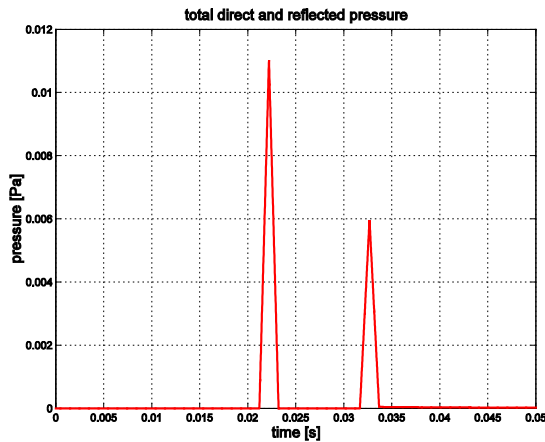
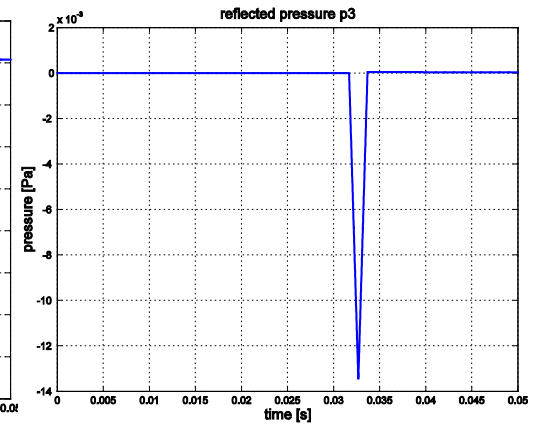
$$Z_0 = 10$$



$$Z_0 = 1$$



$$Z_0 = 0.1$$



Gesamtreflektion: etwa schallhart

verschwindend

schallweich



Beispiel 2: $\sin^2$ - Impuls

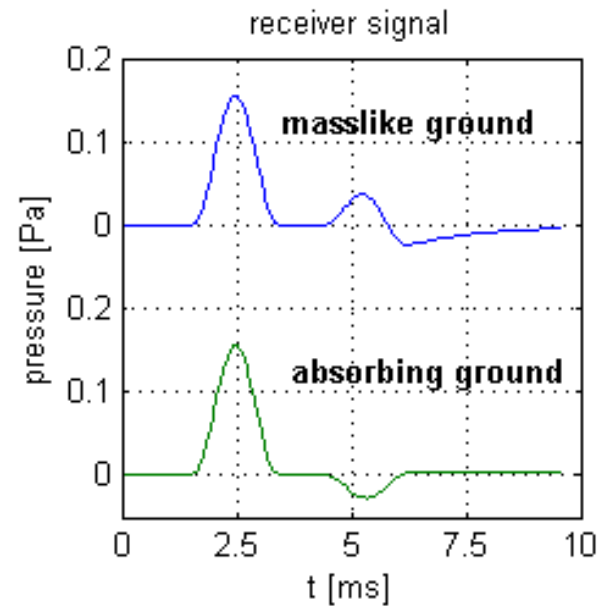
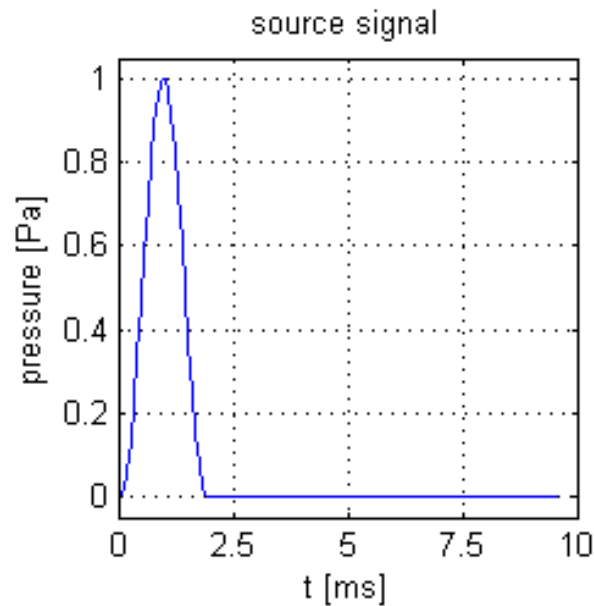
Bodenimpedanz

$$Z_{mass} / j\rho\omega = -1/\xi \quad , \quad \xi = 1.21$$

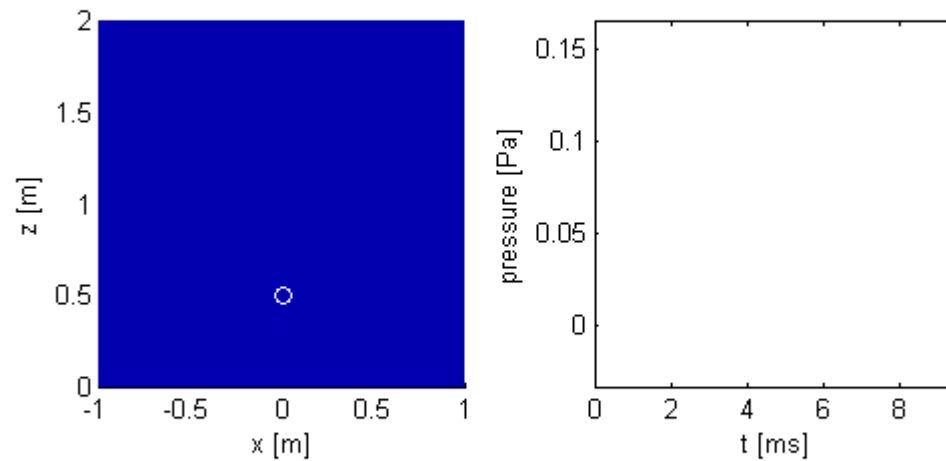
$$Z_{absorb} / \rho c = Z_0 \quad , \quad Z_0 = 0.3$$

Quellsignale

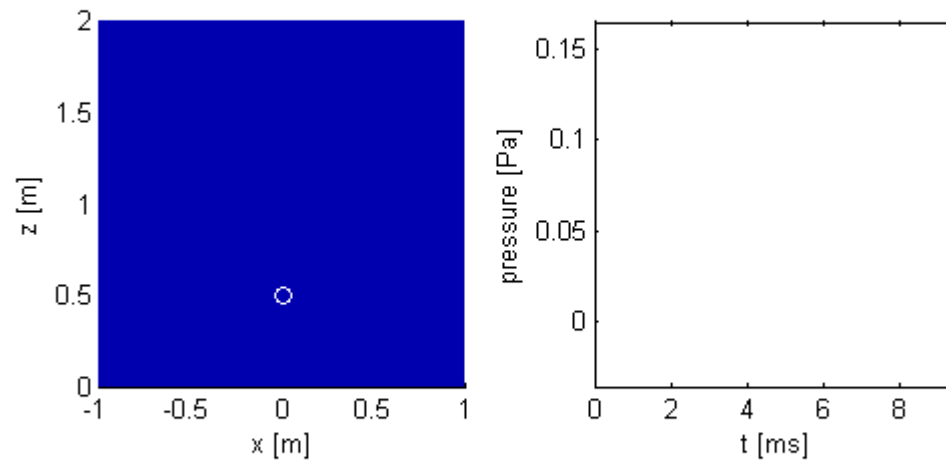
$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \sin^2(\varepsilon c t) & 0 < t < \pi / \varepsilon c \\ 0 & t > \pi / \varepsilon c \end{cases}$$



massenartige Ebene



absorbierende Ebene



Quelle mit konstanter Geschwindigkeit

- Eine Punktquelle bewegt sich entlang der x-Achse auf einer Höhe h mit konstanter Geschwindigkeit u.
- Der Schalldruck p ist die kausale Lösung der inhomogenen Wellengleichung

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -q(t) \delta(x - ut, y, z - h)$$

- Führt man die Lorentz-Transformation bezüglich x und t ein, erhält man als Wellengleichung

$$\Delta_L p_L - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_L}{\partial t_L^2} = -\gamma^2 q(t_L) \delta(x_L) \delta(y_L) \delta(z_L - h_L)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - M^2}} \quad , \quad M = \frac{u}{c}$$

- Die Randbedingungen müssen auch transformiert werden.

massenartige Ebene

$$\frac{\partial p_L}{\partial z_L} - \zeta_L p_L = 0 \quad , \quad \zeta_L = \frac{\zeta}{\gamma} \quad , \quad \zeta = \frac{\rho}{m''}$$

absorbierende Ebene

$$\frac{1}{c} \frac{\partial p_L}{\partial t_L} - M \frac{\partial p_L}{\partial x_L} - Z_{0L} \frac{\partial p_L}{\partial z_L} = 0 \quad , \quad Z_{0L} = \frac{Z_0}{\gamma} \quad , \quad Z_0 = \frac{Z}{\rho c}$$

Numerische Beispiel

Bodenimpedanz

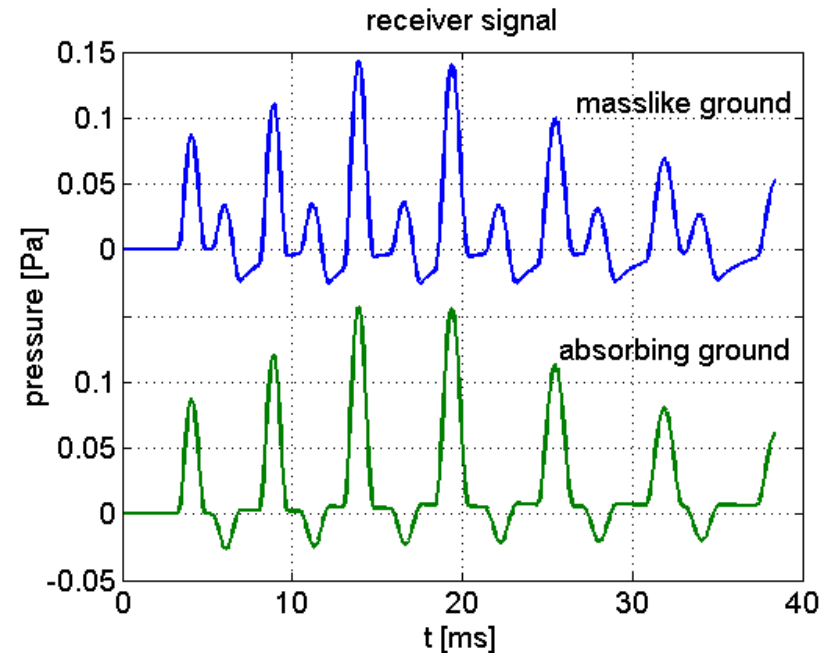
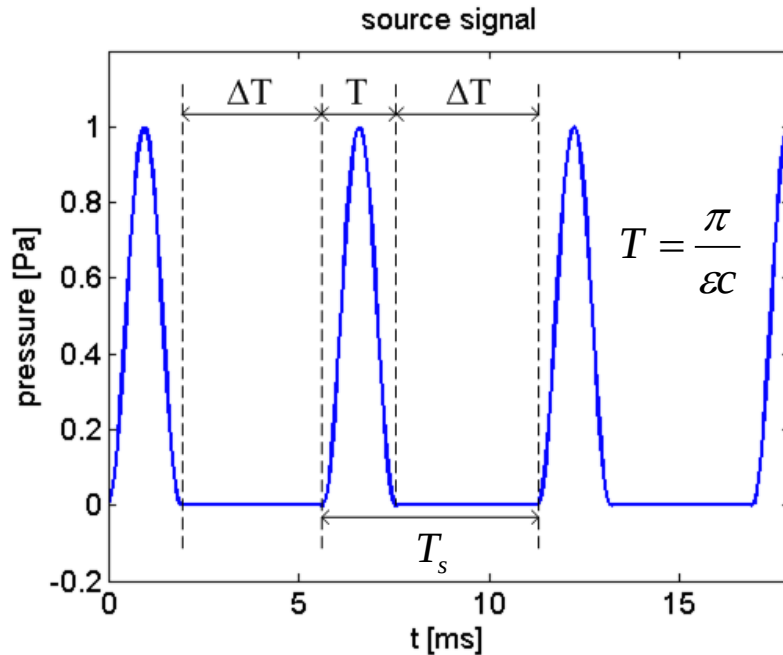
$$Z_{mass} / j\rho\omega = -1/\xi \quad , \quad \xi = 1.21$$

$$Z_{absorb} / \rho c = Z_0 \quad , \quad Z_0 = 0.3$$

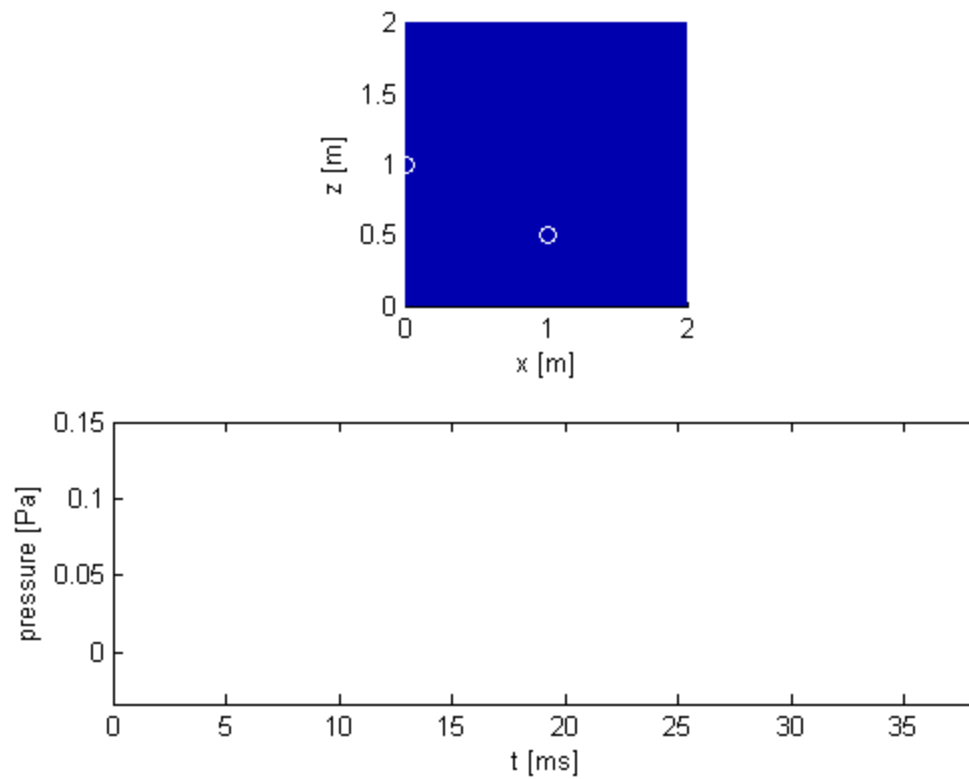
$$M = 0.18 \quad , \quad \gamma = 1.0163$$

Quellsignale

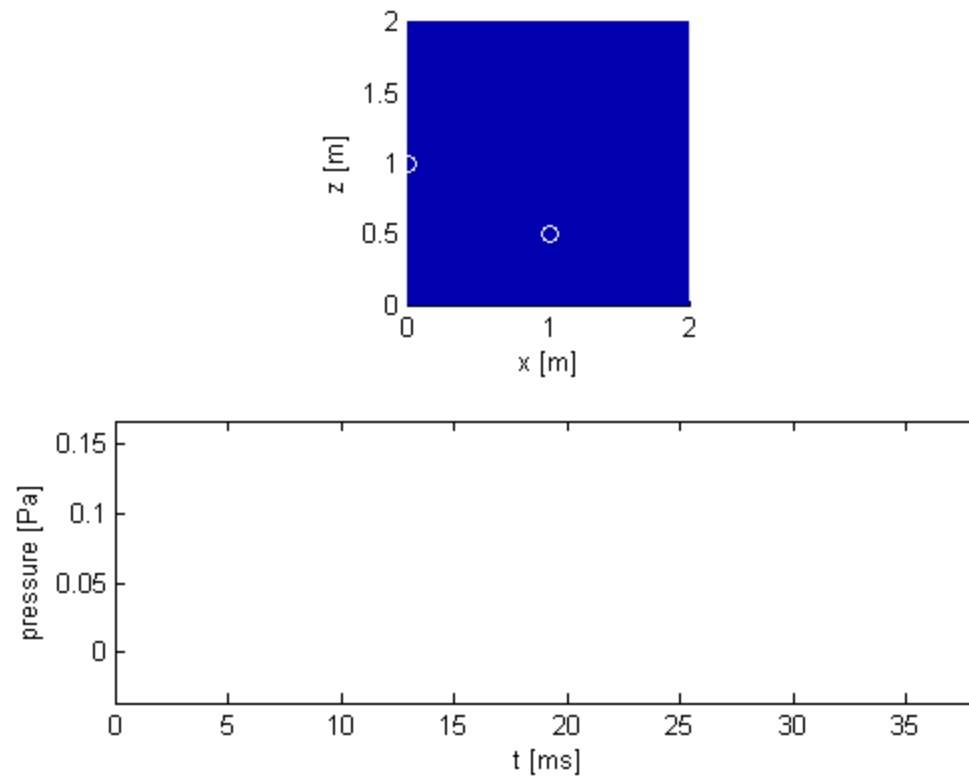
$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \sin^2(\varepsilon c t) & (i-1)T_s < t < (i-1)T_s + T \\ 0 & (i-1)T_s + T < t < iT_s \end{cases}$$



massenartige Ebene



absorbierende Ebene



Details in

M. Ochmann, “Closed form solutions for the acoustical impulse response over a masslike or an absorbing plane”, J. Acoust. Soc. Am. **129(6)**, 3502-3512 (2011).

M. Ochmann, “Exact solutions for sound radiation from a moving monopole above an impedance plane”, J. Acoust. Soc. Am. **133(4)**, 1911-1921, (2013).

Darauf aufbauend kommt nun die Linienquelle

M. Ochmann, “Exact solution for the acoustical impulse response of a line source above an absorbing plane”,
The Journal of the Acoustical Society of America **144**, 1539 (2018).

3. Impulsantworten in 2D

3.1 Theorie

Schallquelle ist ein Dirac-Deltaimpuls zur Zeit $t=0$ und am Ort

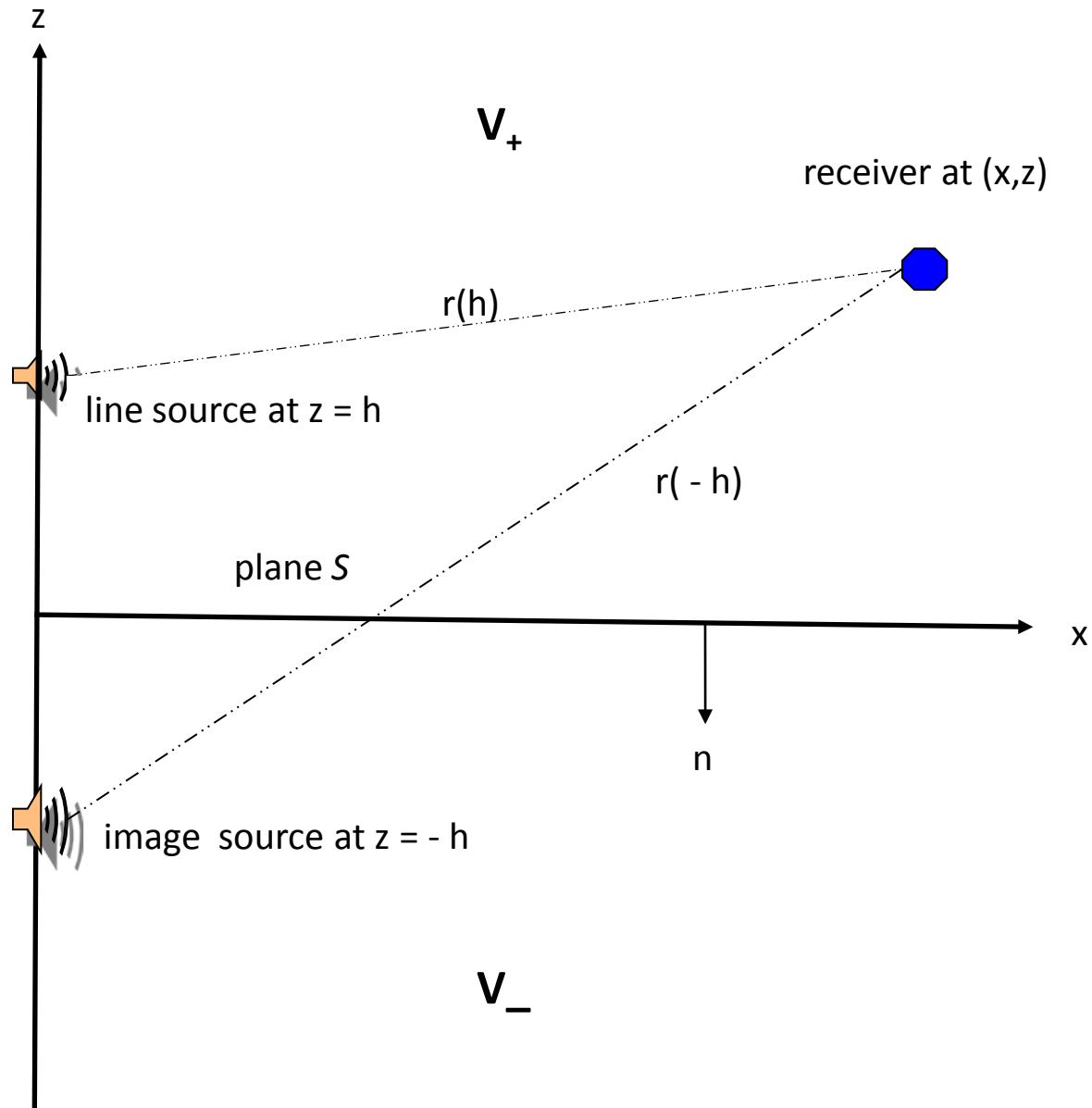
$t=0$ und am Ort $y = (x_s, z_s) = (0, h)$

$$q(x, z, t) = Q\delta(x, z - h, t)$$

die die Wellengleichung

$$\Delta_2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p = -q(x, z, t)$$

plus Randbedingung auf einer unendlichen Ebene erfüllen muss.



Impulsantwort für eine rein absorbierende Ebene in 3 D

$$g_{3D} = \frac{\delta(t - \hat{r}(h)/c)}{4\pi\hat{r}(h)} + \frac{\delta(t - \hat{r}(-h)/c)}{4\pi\hat{r}(-h)} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \frac{H(t - \hat{r}(-h)/c)}{\sqrt{(Z_0 c t + z + h)^2 + (1 - Z_0^2)(x^2 + y^2)}}$$

wird zur Linienquelle durch Superposition unendlicher vieler Punktquellen in y-Richtung

$$g_{2D} = g_{2D,1} + g_{2D,2} + g_{2D,3} = \sum_{n=1}^3 \int_{-\infty}^{+\infty} g_{3D,n}(x, y - \eta, z, t) d\eta$$

$$\hat{r}(\pm h) = \sqrt{x^2 + y^2 + (z \mp h)^2}$$

Die ersten beiden Terme sind wohlbekannt: Linienquelle + Spiegelquelle in 2D

$$g_{2D,rigid} = g_{2D,1} + g_{2D,2} = \frac{1}{2\pi} \frac{H\left(t - \frac{1}{c} \sqrt{x^2 + (z-h)^2}\right)}{\sqrt{t^2 - \frac{1}{c^2} (x^2 + (z-h)^2)}} + \frac{1}{2\pi} \frac{H\left(t - \frac{1}{c} \sqrt{x^2 + (z+h)^2}\right)}{\sqrt{t^2 - \frac{1}{c^2} (x^2 + (z+h)^2)}}$$

mit der Heaviside Funktion

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Die eigentliche Schwierigkeit ist der Korrekturterm zur schallharten Ebene

$$\sigma := g_{2D,3} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} \frac{H\left(t - \frac{1}{c} \sqrt{x^2 + (y - \eta)^2 + (z + h)^2}\right)}{\sqrt{(Z_0 c t + z + h)^2 + (1 - Z_0^2)(x^2 + (y - \eta)^2)}} d\eta$$

Denn Vertauschung von Integral und Ableitung liefert Fehlerhaftes.
Daher ist zu bilden – beachte die Dirac-Delta-Funktion

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[H\left(t - \frac{w}{c}\right) f(t, s) \right] = \delta\left(t - \frac{w}{c}\right) f(t, s) + H\left(t - \frac{w}{c}\right) \frac{\partial f(t, s)}{\partial t}$$

mit

$$f(t, s) = \frac{1}{\sqrt{(Z_0 c t + z_h)^2 + (1 - Z_0^2)(x^2 + s^2)}}$$

Berechnung beider Integrale führt nach längerer Rechnung auf das

Hauptresultat

$$g_{2D} = \frac{1}{2\pi} \frac{H\left(t - \frac{1}{c} \sqrt{x^2 + (z-h)^2}\right)}{\sqrt{t^2 - \frac{1}{c^2} (x^2 + (z-h)^2)}} + \frac{1}{2\pi} \frac{H\left(t - \frac{1}{c} \sqrt{x^2 + (z+h)^2}\right)}{\sqrt{t^2 - \frac{1}{c^2} (x^2 + (z+h)^2)}} \frac{(Z_0 ct)^2 - z_h^2 - (1 + Z_0^2) x^2}{(Z_0 ct + z_h)^2 + (1 - Z_0^2) x^2}$$

oder

$$g_{2D} = g_{2D,1} + g_{2D,2} R(t, x, z, h, Z_0)$$

mit dem zylindrischen Reflexionsfaktor

$$R(t, x, z, h, Z_0) = \frac{(Z_0 ct)^2 - z_h^2 - (1 + Z_0^2) x^2}{(Z_0 ct + z_h)^2 + (1 - Z_0^2) x^2}$$

Eigenschaften des zylindrischen Reflexionsfaktors

$$R(t, x, z, h, Z_0) = \frac{(Z_0 ct)^2 - z_h^2 - (1 + Z_0^2)x^2}{(Z_0 ct + z_h)^2 + (1 - Z_0^2)x^2}$$

$$|R(t, x, z, h, Z_0)| \leq 1 \quad \text{für physikalische sinnvolle Argumente}$$

$$R(t, x, z, h, Z_0 \rightarrow \infty) \rightarrow \frac{(Z_0 ct)^2 - (+Z_0^2)x^2}{(Z_0 ct)^2 + (-Z_0^2)x^2} = 1$$

$$R(t, x, z, h, Z_0 = 0) = \frac{-z_h^2 - x^2}{z_h^2 + x^2} = -1$$

Superposition unendlich vieler Linienquellen = Integration über x-Quellorte gibt

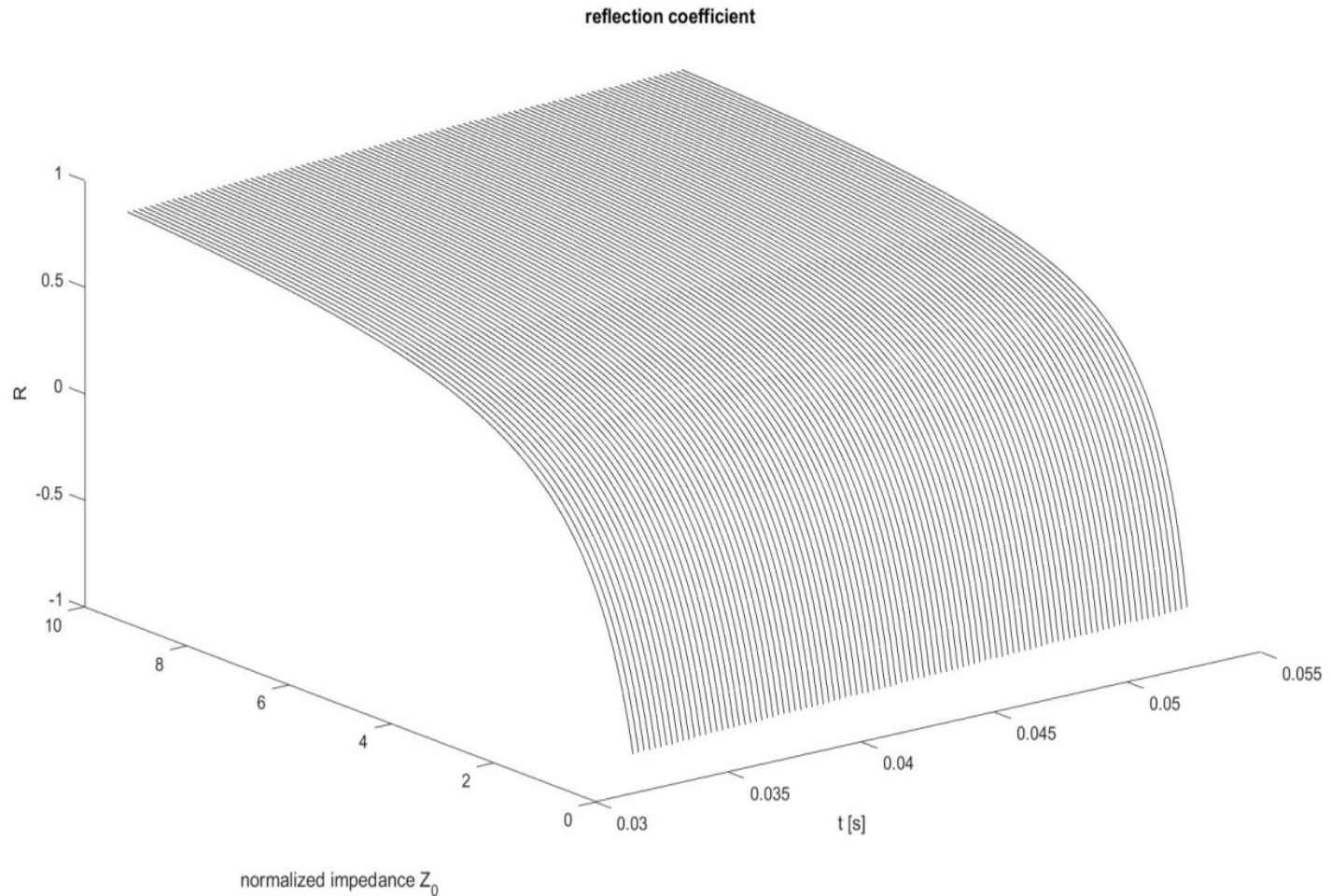
$$g_{1D} = \frac{c}{2} \left\{ H\left(t - \frac{|z-h|}{c}\right) + r_{1D} H\left(t - \frac{|z+h|}{c}\right) \right\}$$

mit

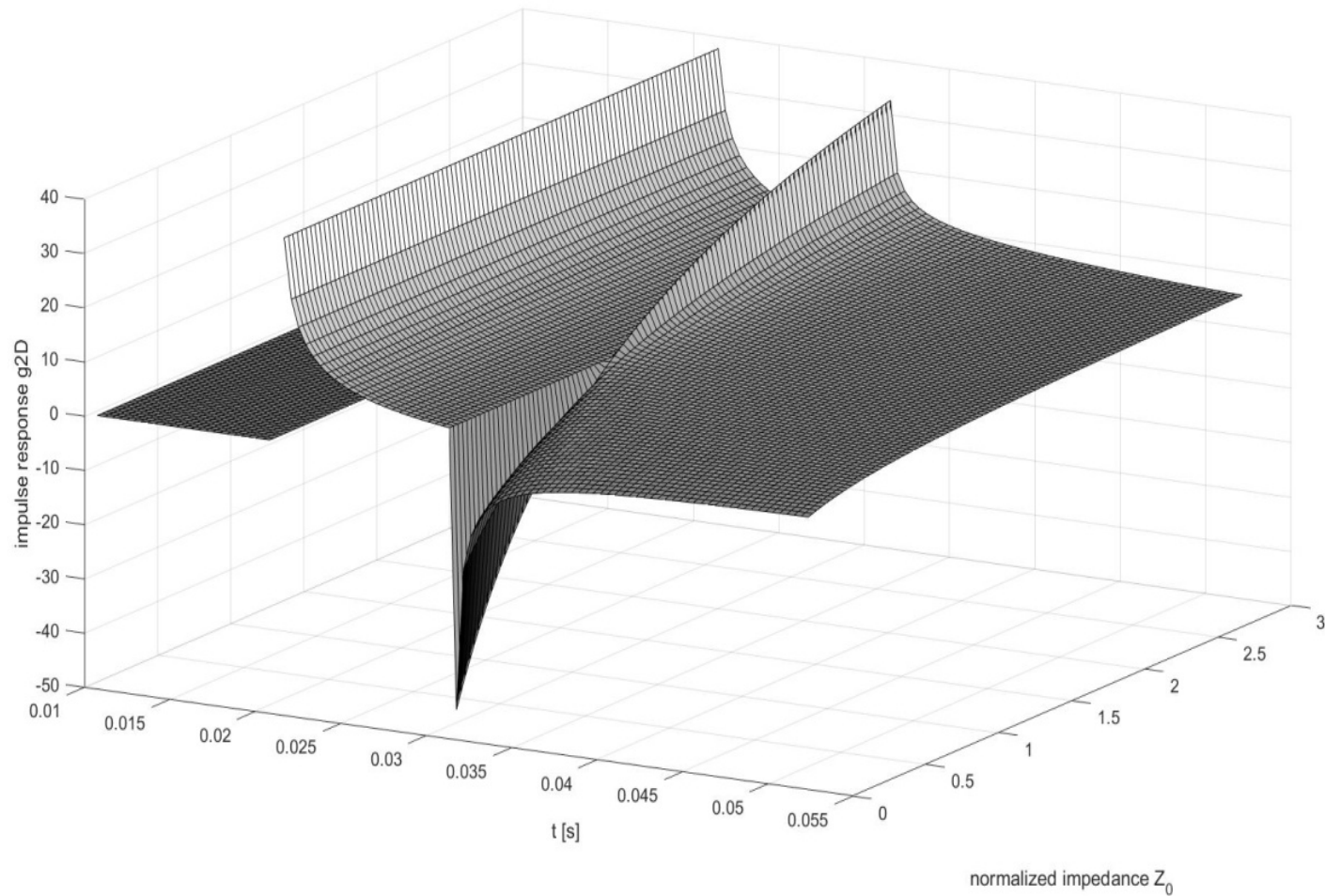
$$r_{1D} = \frac{Z_0 - 1}{Z_0 + 1}$$

d. h. die eindimensionale Greensche Funktion des absorbierenden Halbraums

Reflection factor R for different times and impedances, and for the following parameters: $h = 2m, z = 8m, x = 4m, t_{-h} = 21ms, t_h = 31.4ms$



2D impulse response for different times and impedances, and for the following parameters: $h = 2m, z = 8m, x = 4m, t_{-h} = 21ms, t_h = 31.4ms$



Faltung gibt den Schalldruck

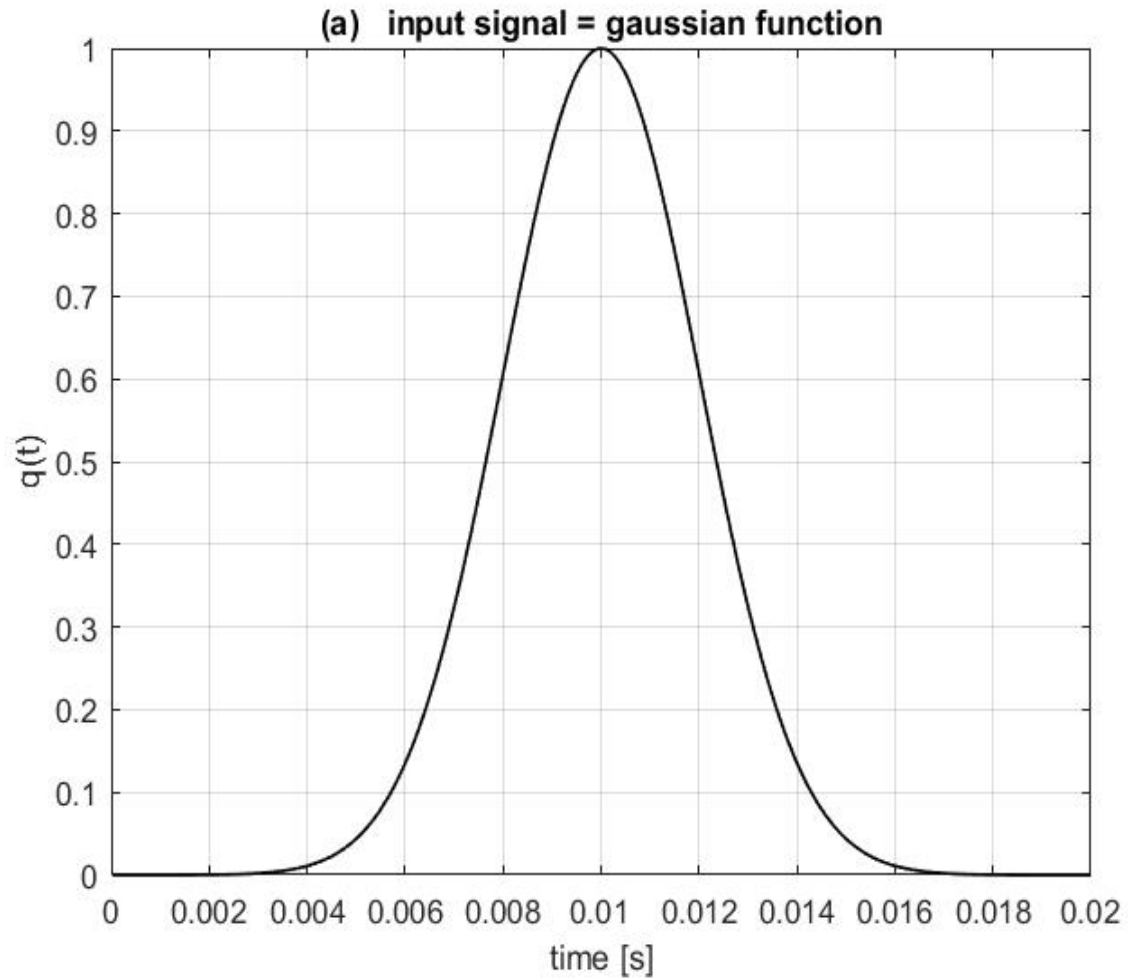
$$p = p_1 + p_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{t_{-h}}^{\infty} \frac{q(t-\tau)}{\sqrt{\tau^2 - t_{-h}^2}} d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{t_h}^{\infty} R(\tau, x, z, h, Z_0) \frac{q(t-\tau)}{\sqrt{\tau^2 - t_h^2}} d\tau$$

für beliebiges Zeitsignal $q(t)$ der Linienquelle mit

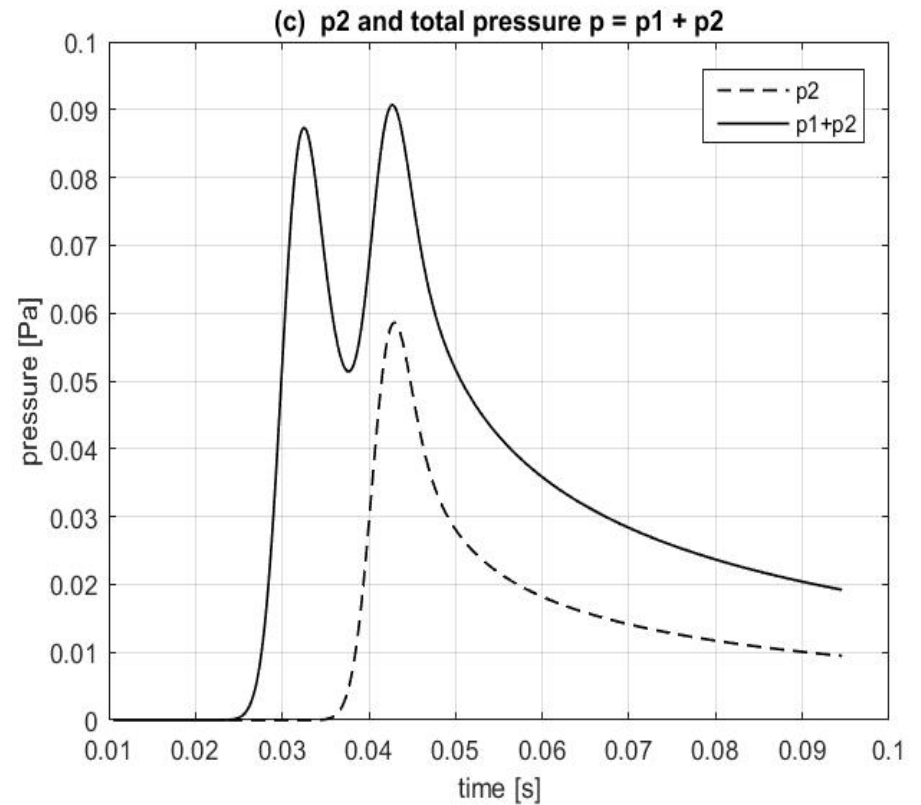
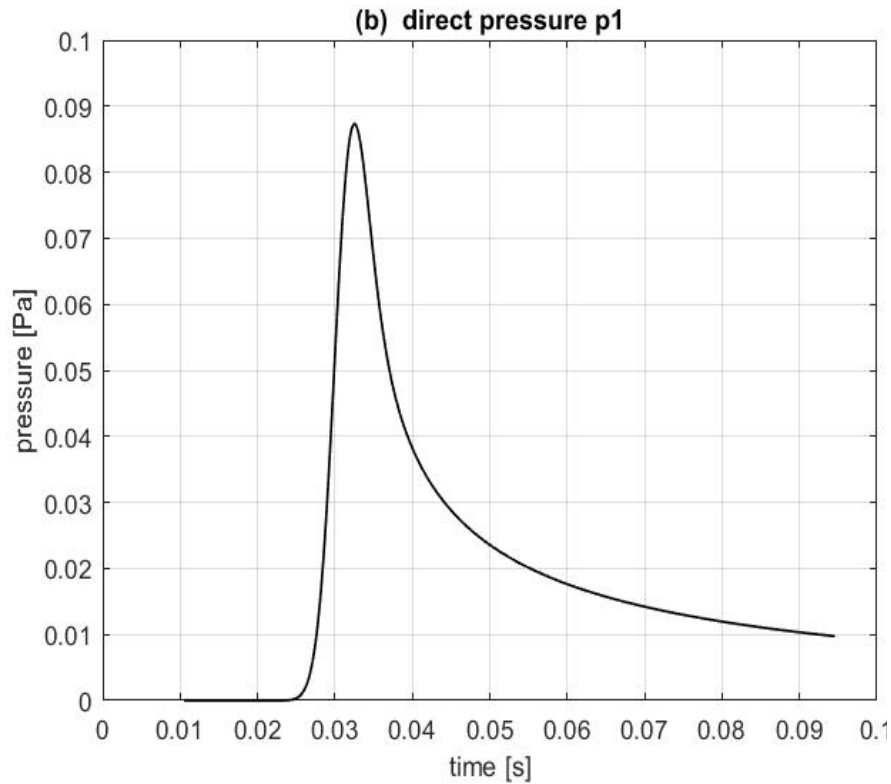
$$t_{-h} = \frac{1}{c} \sqrt{x^2 + (z-h)^2} \quad \text{und} \quad t_h = \frac{1}{c} \sqrt{x^2 + (z+h)^2}$$

d. h. die eindimensionale Greensche Funktion des absorbierenden Halbraums

Beispiel: Gaußscher Impuls



Beispiel: Gaußscher Impuls mit $Z_0 = 10$, d.h. fast schallhart

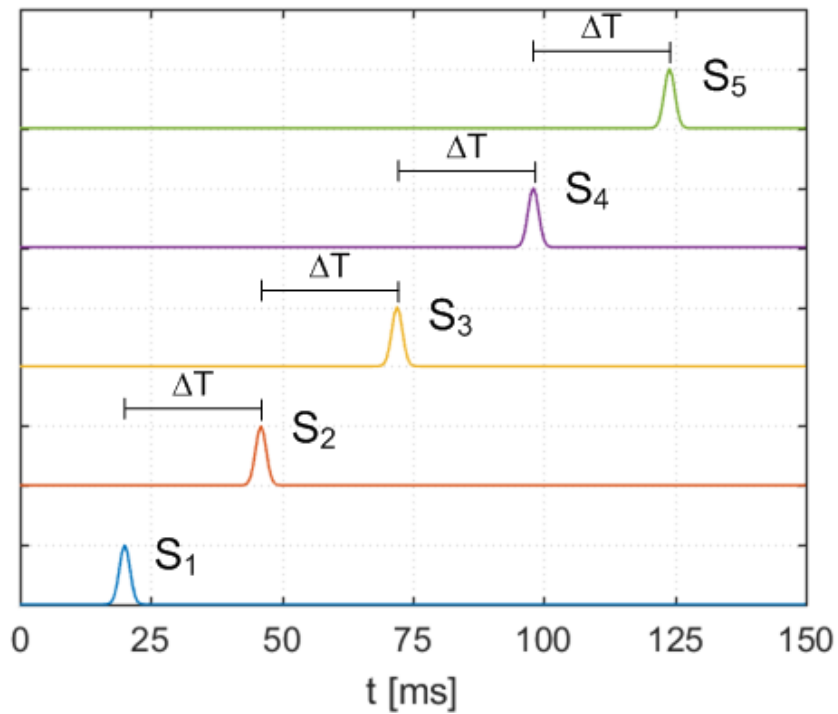


Impulsreihe

Gauss-Impulse

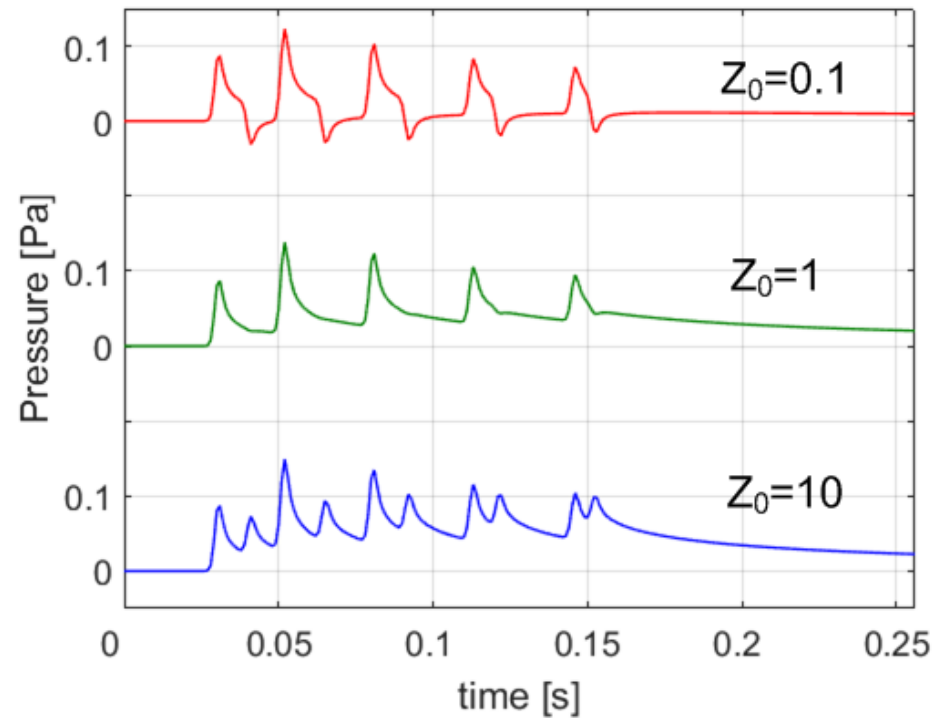
$$\mu_i = 0.02 + i\Delta T \quad ,$$

$$\Delta T = 0.026 \quad , \quad \sigma = 0.001$$

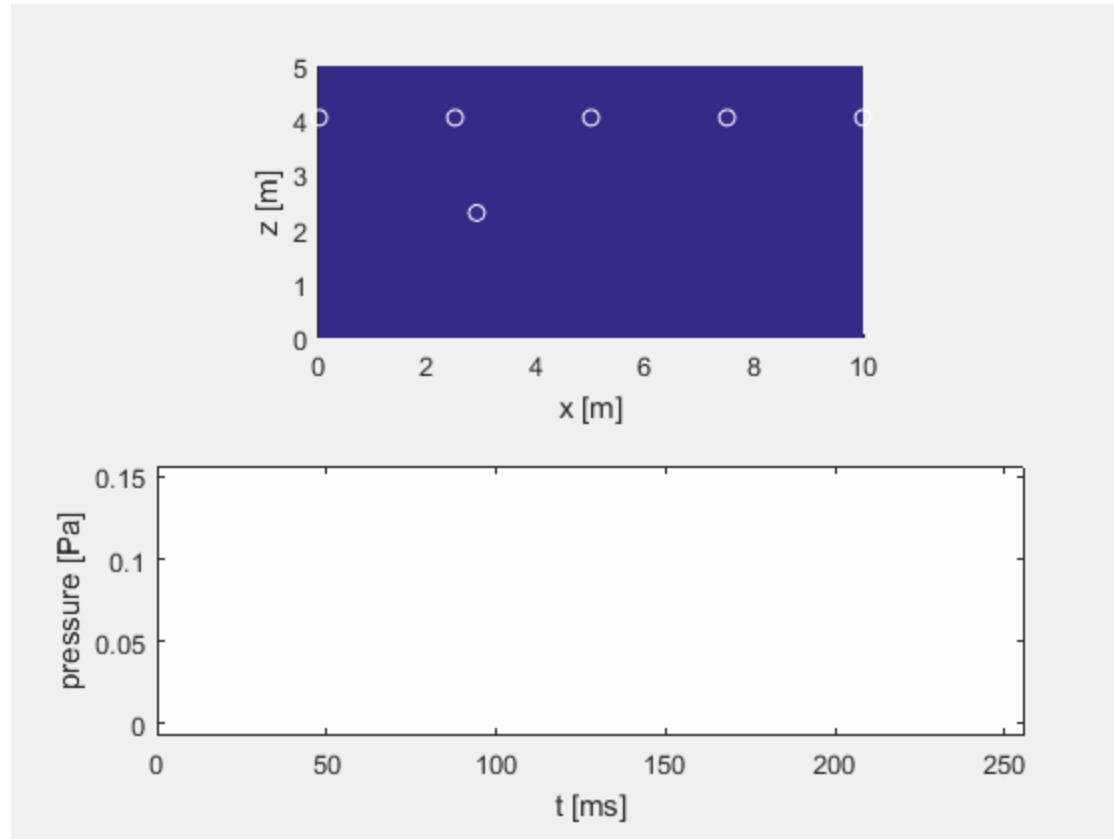


Bodenimpedanz

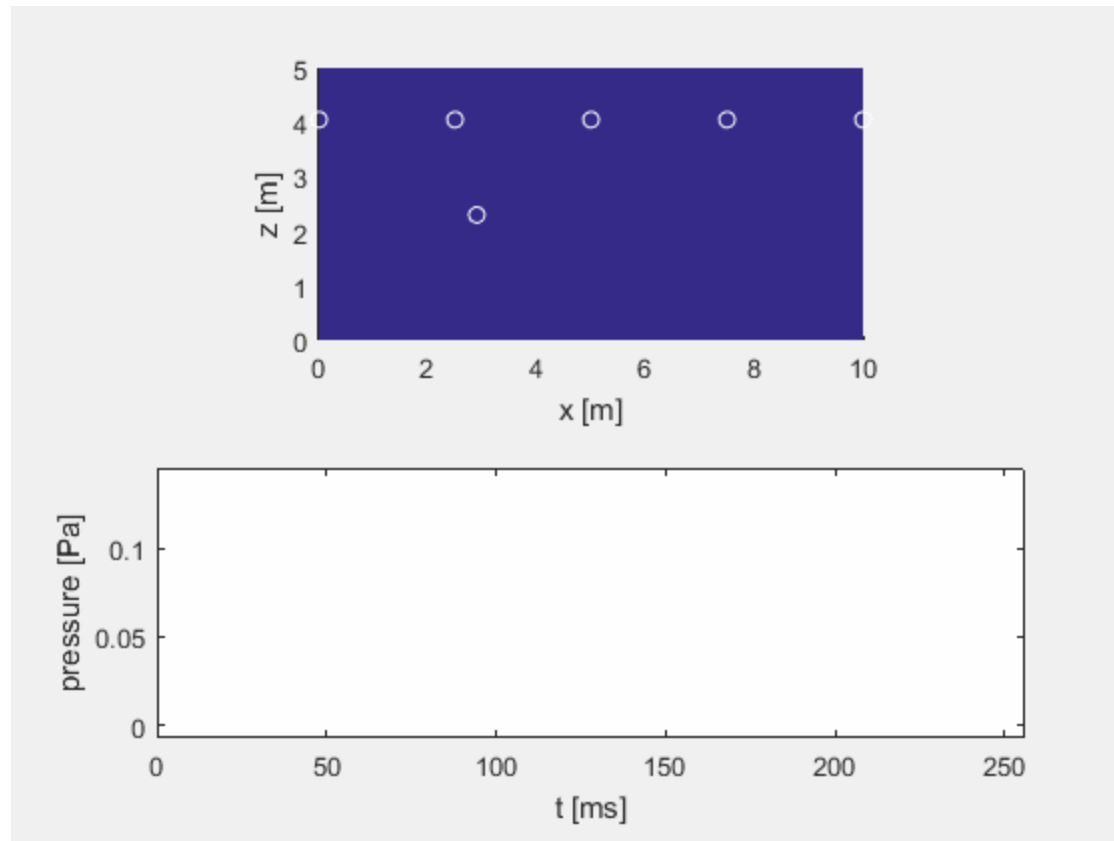
$$Z_0 = 0.1, 1, 10$$



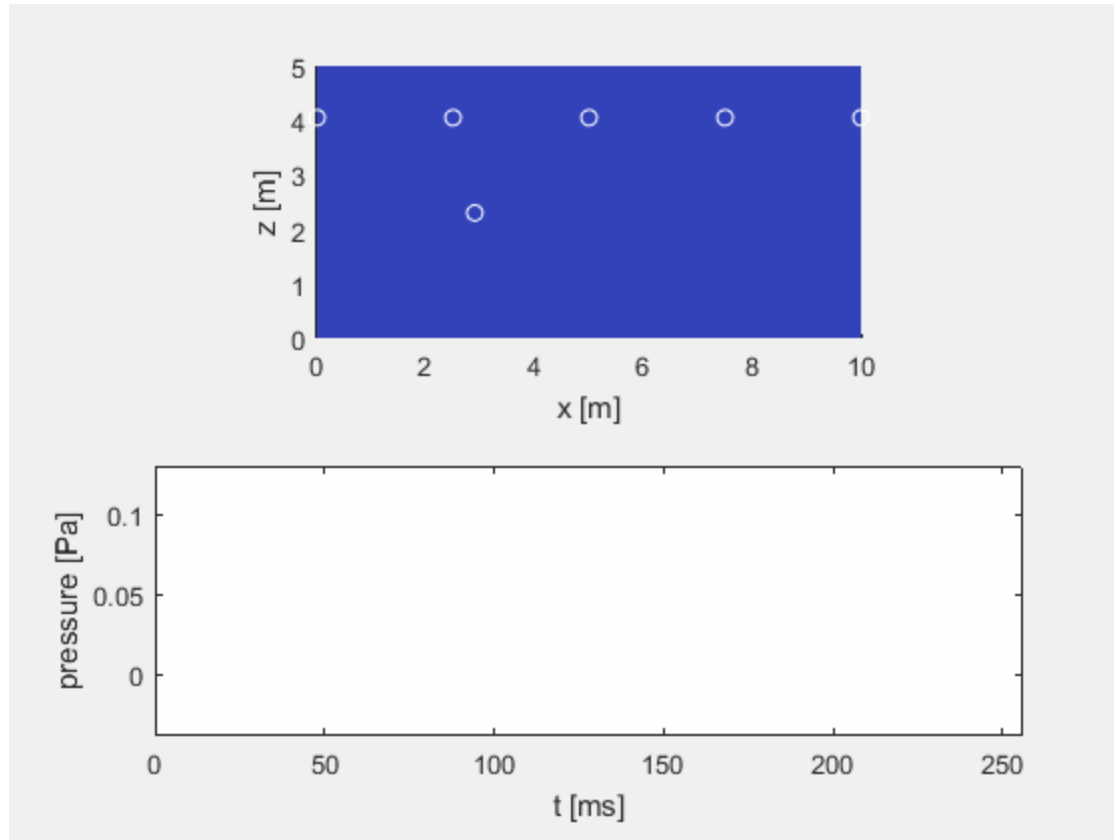
$$Z_0 = 10$$



$$Z_0 = 1$$



$$Z_0 = 0.1$$



Zusammenfassung

Impulsantwort über einer absorbierende Ebene in 1D, 2D und 3D geschlossen darstellbar

Zylindrischer Reflexionsfaktor hat die einfache Struktur einer algebraischen Funktion

In 3D einfache Darstellung auch für Ebenen mit Massenimpedanz

Zukünftige Arbeiten: exakte Ausdrücke der Impulsantwort für Halbräume mit allgemeineren Oberflächenimpedanzen

Transiente Halbraum-Green-Funktion einer Linienquelle kann verwendet werden:

- als Benchmark für TBEM im Halbraum.
- für schnelle 2D-Randelementmethode im Zeitbereich. (Züge, Autobahn ...)